輻射優勢の宇宙における圧力とエネルギー密度(基研長期研究会「進化の力学への場の理論的アプローチ」報告,研究会報告)

林, 弘文

輻射優勢の宇宙における圧力とエネルギー密度

静岡大学教育学部　　林　弘文

I．はじめに

今年（１９８７年）はグラショウーワインバーグーサラム理論（ＧＷＳ理論）、特にワインバーグの「軽粒子の模型」と題する論文[1]　が発表されて２０年という記念すべき年である。現代の素粒子物理学はＧＷＳ理論が基礎であると言っても過言ではないと思う。この理論の中で、「自発的対象性の破れ」（ＳＳＢ）は本質的な役割を果している。高温のときは高い対象性をもっていて、全ての粒子は質量がゼロであるが、温度が降下して、ある温度（臨界温度）になると、ヒッグス場ϕの真空期待値$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$となり、電子は質量を持つようになる。

ＧＷＳ理論以前においては、単なる偶然として理論の中に入っていた電子の質量が、この理論の出現によって、まだ不十分とは言うものの、電子とヒッグス場との結合常数とヒッグス場の真空期待値の積で与えられる様になった。故坂田先生の言われていた、理論の中の偶然なるものが必然的なものとして説明されるような段階に１歩近付いたと言える。この意味で、ＧＷＳ理論は偉大な難関突破であった。

ＧＷＳ理論において決定的な役割を果たした自発的な破れと結び付いている相転移は宇宙論において欠かせない現象である。このＳＳＢが輻射優勢の宇宙において、どの様に機能するか、以下の簡単なスカラー場ϕの模型について検討する。

II．アインシュタインの方程式とスカラー場の方程式

宇宙の作用として、次の量Ｉを仮定する

$$I = \int d^4x \sqrt{g}\left(\frac{1}{16\pi G}R + \langle \mathcal{L}(\phi) \rangle\right), \qquad (1)$$

ただし

$-g =$ 計量テンソル$g^{\mu\nu}$の行列式、

$R = -g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$、（スカラー曲率）

$L(\phi) = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - V(\phi)$、（ラグランジュアン）

Ｇ＝万有引力常数、

$\langle\ \rangle =$ 真空期待値を意味する。

$g^{\mu\nu}$ と ϕ について変分原理を作用 I に適用すると

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2}$$

$$\left\langle -(g^{\mu\nu}\partial_\nu \phi)_{;\mu} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right\rangle = 0. \tag{3}$$

エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は

$$T_{\mu\nu} = \left\langle -2\frac{\partial \mathcal{L}(\phi)}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}(\phi) \right\rangle, \tag{4}$$

と書ける。完全流体を仮定すると

$$T_{\mu\nu} = p\, g_{\mu\nu} + (p + \rho) u_\mu u_\nu, \tag{5}$$

ここで、p は圧力、ρ はエネルギー密度、u は4元速度であり、共動座標で表すと、$u_i = 0$、$u_t = 1$ となる。

具体的な計算をする為に、ロバートソン・ウオーカー計量を仮定する

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2, \tag{6}$$

a(t)は宇宙のスケール因子である。

上の式から

$$\begin{aligned} T_{tt} = \rho &= \langle \dot{\phi}^2 - \mathcal{L}(\phi) \rangle, \\ &= \left\langle \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a(t)^2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right\rangle, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} T_{xx} &= p\, a(t)^2 \\ &= \left\langle \frac{1}{2} a(t)^2 \dot{\phi}^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 - a(t)^2 V(\phi) \right\rangle, \end{aligned} \tag{8}$$

が得られる。ドットは時間微分を意味する。同じ式はブランデンバーガーたちに

よって得られている。[2] ポテンシアル部分が他の項に比較して十分に大きいと

$$p \simeq -\rho \simeq -\langle V(\phi) \rangle, \tag{9}$$

インフレーションが起こる（a（t)が指数関数的に増大する）。[3、4]

ここではインフレーションが起こる前の、輻射優勢（スカラー粒子は質量ゼロ）を考える。即ち、

$$p = \frac{1}{3}\rho, \tag{10}$$

を用いると、（7）と（8）より

$$\rho = \left\langle \frac{3}{4}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4a(t)^2}(\nabla\phi)^2 \right\rangle. \tag{11}$$

熱力学的平衡においては、スカラー場ϕの密度行列の方法による熱力学的平均値と真空期待値が等しいことが証明される。[5] スカラー場ϕについて計算すると

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\varepsilon_p}\,\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_p}-1}\,d\mathbb{P}, \tag{12}$$

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varepsilon_p\,\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_p}-1}\,d\mathbb{P}, \tag{13}$$

$$\langle (\nabla\phi)^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathbb{P}^2}{\varepsilon_p}\,\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_p}-1}\,d\mathbb{P}. \tag{14}$$

$\varepsilon_p = |\mathbb{P}|$とすると、計算ができて

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle = \langle (\nabla\phi)^2 \rangle = \frac{1}{30}\pi^2 T^4. \tag{15}$$

従って

$$\rho = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4a(t)^2}\right)\frac{1}{30}\pi^2 T^4. \qquad (16)$$

他方、局所的エネルギー運動量の保存則、$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$、と（5）、（6）から

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(p + \rho) = 0, \qquad (17)$$

を得るが、これを用いると

$$\rho a(t)^4 = a\ \mathrm{const.}\ (\equiv C_0), \qquad (18)$$

となる。（16）をみるとわかるが、a(t)= 1 と置けば、通常のステファン・ボルツマンの法則に帰着する。スケール因子が宇宙初期においては極端に小さいので、温度依存性が全く違ったものになる。

III. 圧力とエネルギー密度の関係

上の結果について、宇都宮大学での学会で発表した時、「おかしい」と言う意見がでた。ステファン・ボルツマンの法則とは違った結果になるのが釈然としない。それで、通常の輻射優勢の関係式　$p = \rho / 3$ の導出の過程を考えてみた。この式を出す時に用いる関係は

$$p = \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \qquad (19)$$

である。ω、$\mathbf{p}$ はガス分子のエネルギーと運動量であり、$n_{\mathbf{p}}$ はガス分子の数密度である。熱力学で計算するときは、ガス分子が当たる壁を固定している。もし宇宙が膨張して壁が後退しているとし、その影響を取り入れて、$p = \rho / (3a(t)^2)$ としたら、ステファン・ボルツマンの法則が得られた。この研究会で報告したところ、再び、「初歩的なミスをしている」と指摘されたが、著者の不勉強で、どこが間違いか、まだ十分理解できないでいる。確かに、スカラー粒子は質量ゼロであり、光速について初歩的ミスをしたのは間違いない。ここに間違いと思われる事をあえて書いた。この事について教えていただければ有難いと思います。

文献

1) S. Weinberg, Phys.Rev.Letters 19, 1264(1967).
2) R. Brandenberger, R.Kahn,and W.H. Press, Phys.Rev.D28,1809(1983).

3)A.H. Guth, phys.Rev.D23,347(1981).
4)K. Sato,Mon.Not.Roy.Astron.Soc.195,467(1981).
5)H. Matsumoto, Z. Physik C 34,335(1987).

量子通信理論

通信路容量無限大の光通信を目指して

広田 修 （玉川大学）

1. まえがき

情報理論の骨格が科学技術の主要理論として定着して以来40年が経過し，現在では極めて多岐にわたる分野に多様な影響を与えている．シャノンの理論体系が今日人類が生み出した主要理論の一つとして深く受け入れられているのは，その理論が豊富な技術や応用を生み出す能力を備えているからである．

シャノンの情報（通信）理論の中核の概念は“エントロピー”による情報量の計量化である．エントロピーは良く知られているように熱統計力学の基礎でもある．また数学においてもエントロピーの概念は数学の基礎問題を解析するための重要な手法の一つとなっている．このようなわけでエントロピーを情報通信，物理，数学，拡大解釈すれば宇宙の根本的な概念とみなしたいと思うのは当然の成り行きであろう．したがってエントロピーの魅力にとりつかれた研究者は数知れない．各分野においてエントロピーに関する有益な理論が構築されているようではあるが，情報通信の分野ではシャノンの定義したエントロピーを越えるものはない．むしろ，種々のエントロピー理論においても情報通信の概念に対応させれば全てシャノンのエントロピーと等価になる．シャノンのエントロピーは通信科学という極めて深淵なバックグラウンドを伴うものである．

シャノンの理論は信号の物理学とは直接的な関係はなく，また信号と雑音の実体は完全に独立な概念である．これは彼の理論が古典物理学に従う信号や雑音の通信系のみを統括する，または通信用ディバイスとは全く独立であることを意味する．このような性質は一面は利点であるが，通信科学に対しては欠点となる．

1960年メイマンによってレーザーが発明され，光通信の可能性がクローズアップされた．光は10^{14}Hz以上の高い周波数をもつため，その実体は量子力学によって説明されるものである．光の物理的特性を全て利用した通信科学を完成させるためには，シャノンの理論に量子力学的特性をもつ信号や雑音を伴う通信系を統括するための補正を加えた“光通信理論”（あるいは量子通信理論）を発展させる必要がある．これはシャノンの平均相互情報量

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= H(X)-H(X|Y) \\ &= H(Y)-H(Y|X) \end{aligned} \qquad (1)$$

に，通信路の入力から出力に至る信号系の物理学による極めて複雑な拘束を与えることを意味する．これによって，通信のハードウェアと記号上の理論であるシャノンの理論を統一的に論ずるこ